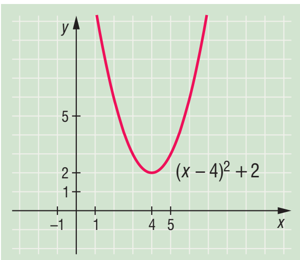


10.3. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

A másodfokú egyenlet és függvény – megoldások

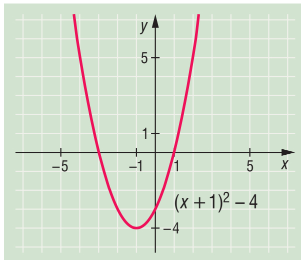
2149 *a)* $(x-1)^2+3$; *b)* $(x-3)^2+1$; *c)* $(x+2)^2-3$; *d)* $(x-6)^2-25$;
e) $(x+8)^2-60$; *f)* $(x-10)^2-93$; *g)* $(x-1{,}5)^2-0{,}25$; *h)* $(x+2{,}5)^2-5{,}25$;
i) $2\cdot(x-2)^2+5$; *j)* $3\cdot(x-2)^2-5$; *k)* $-(x+5)^2+27$; *l)* $-(x-4)^2+19$.

2150 *a)*



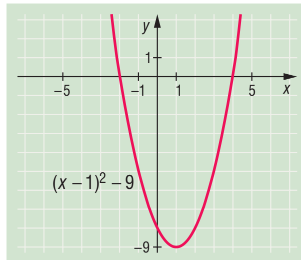
Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=2$,
helye: $x=4$.

b)



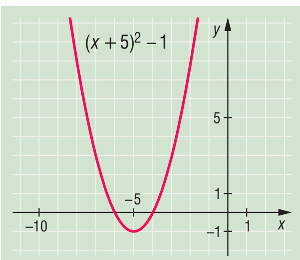
Zérushely: $x_1=-3$, $x_2=1$.
Minimum értéke: $y=-4$,
helye: $x=-1$.

c)



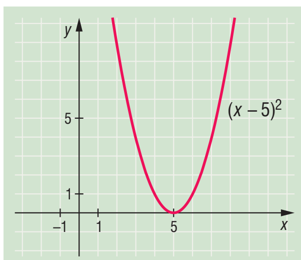
Zérushely: $x_1=4$, $x_2=-2$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=1$.

d)



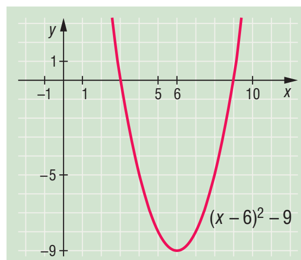
Zérushely: $x_1=-6$, $x_2=-4$.
Minimum értéke: $y=-1$,
helye: $x=-5$.

e)



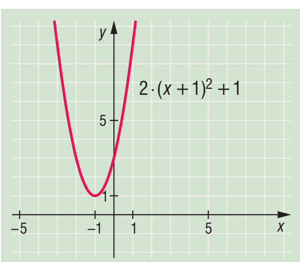
Zérushely: $x=5$.
Minimum értéke: $y=0$,
helye: $x=5$.

f)



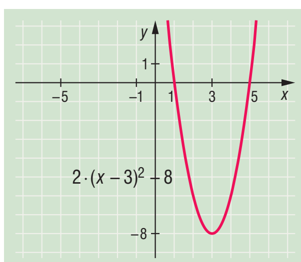
Zérushely: $x_1=3$, $x_2=9$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=6$.

g)



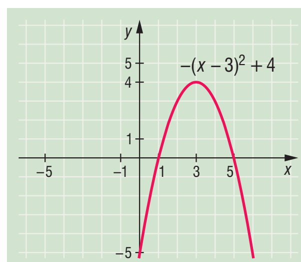
Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=1$,
helye: $x=-1$.

h)



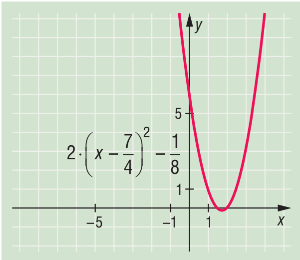
Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Minimum értéke: $y=-8$,
helye: $x=3$.

i)



Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Maximum értéke: $y=4$,
helye: $x=3$.

j)

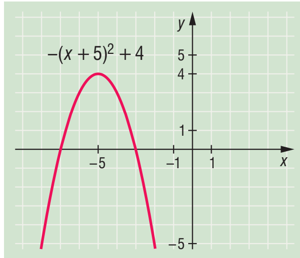


Zérushely: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$.

Minimum értéke: $y = -\frac{1}{8}$,

helye: $x = \frac{7}{4}$.

k)

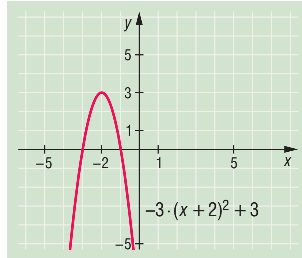


Zérushely: $x_1 = -7$, $x_2 = -3$.

Maximum értéke: $y = 4$,

helye: $x = -5$.

l)



Zérushely: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

Maximum értéke: $y = 3$,

helye: $x = -2$.

2151 *a)* $a(x) = x^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

b) $b(x) = (x + 1)^2 + 1$, nincs zérushely.

c) $c(x) = (x - 2)^2$, zérushely: $x = 2$.

d) $d(x) = (x + 3)^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = -4$ és $x_2 = -2$.

e) $e(x) = (x - 4)^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = 3$ és $x_2 = 5$.

f) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$, zérushelyek: $x_1 = 0$ és $x_2 = -4$.

g) $g(x) = 2\cdot(x - 1)^2 - 2$, zérushelyek: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

h) $h(x) = -(x + 4)^2 + 9$, zérushelyek: $x_1 = -1$ és $x_2 = -7$.

2152 *a)* $f(x) = (x + 3)^2 + c - 9$.

Nincs zérushely, ha $c > 9$. Egy zérushely van, ha $c = 9$. Két zérushely van, ha $c < 9$.

b) $g(x) = (x - 4)^2 + c - 16$.

Nincs zérushely, ha $c > 16$. Egy zérushely van, ha $c = 16$. Két zérushely van, ha $c < 16$.

c) $h(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c - \frac{25}{4}$.

Nincs zérushely, ha $c > \frac{25}{4}$. Egy zérushely van, ha $c = \frac{25}{4}$. Két zérushely van, ha $c < \frac{25}{4}$.

2153 *a)* $x^2 - 14x + p = (x - 7)^2 - 49 + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > 49$.

b) $2x^2 - 6x + p = 2\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > \frac{9}{2}$.

c) $5x^2 - 8x + p = 5\cdot\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{5} + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > \frac{16}{5}$.

2154 *a)* $f(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$. Tehát $b = -4$; $c = 5$.

b) $f(x) = (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Tehát $b = -10$; $c = 25$.

c) $f(x) = (x + 3)^2 - 3 = x^2 + 6x + 6$. Tehát $b = 6$; $c = 6$.

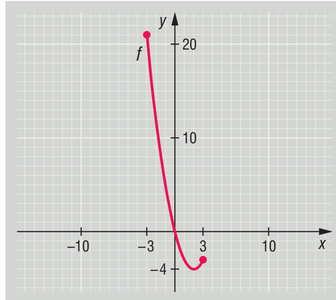
2155 $f(x) = (x-2)^2 - 4$, a függvény grafikonja az ábrán látható.

a) Az adott intervallumon egy zérus helyvan: $x = 0$.

b) Az adott intervallumon maximum található az $x = -3$ helyen, értéke: $y = 21$.

Minimum az $x = 2$ helyen van, értéke: $y = -4$.

c) A függvény szigorúan monoton csökken, ha $x \in [-3; 2]$, növekszik, ha $x \in [2; 3]$.



2156 *a)* $2 \cdot 3^2 - b \cdot 3 + 18 = 0$, ebből $b = 12$.

b) $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. Nincs zérushely, ha $18 - \frac{b^2}{8} > 0$, $-12 < b < 12$.

c) $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. $\frac{b}{4} = 1$, tehát $b = 4$ esetén lesz az $x = 1$ helyen a minimum, ekkor $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 16$, a minimum érték 16 és nem 10. Tehát nincs a feltételnek megfelelő b.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete – megoldások

2157 *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; *b)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$; *c)* $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$;

d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$; *e)* $x_1 = 20$, $x_2 = -20$; *f)* $x_1 = 12$, $x_2 = -12$;

g) $x_1 = 13$, $x_2 = -13$; *h)* nincs megoldás; *i)* $x_1 = 10$, $x_2 = -10$;

j) $x_1 = 7$, $x_2 = -7$; *k)* $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; *l)* $x_1 = 11$, $x_2 = -11$.

2158 *a)* $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; *b)* $x_1 = 0$, $x_2 = -7$; *c)* $x_1 = 0$, $x_2 = -3$;

d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *e)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{4}$; *f)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

g) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{9}{7}$; *h)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{17}{3}$.

2159 *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 2$, $x_2 = -6$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = -6$;

d) $x_1 = -3$, $x_2 = -9$; *e)* nincs megoldás; *f)* $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;

g) $x_1 = 1$, $x_2 = -9$; *h)* $x_1 = 3$, $x_2 = 13$; *i)* $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

2160 *a)* $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 5$, $x_2 = 3$;

d) $x_1 = -3$, $x_2 = 7$; *e)* $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; *f)* $x = 5$;

g) $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{3}{2}$; *h)* $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$; *i)* $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$;

j) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -4$; *k)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{5}{3}$; *l)* nincs megoldás;

m) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$; *n)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; *o)* $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$;

p) $x = 7$; *q)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *r)* $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{7}{4}$.

2161 *a)* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$;

d) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$; *e)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{5}$; *f)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -8$;

g) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; *h)* $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{8}$; *i)* $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

j) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{5}{2}$; *k)* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; *l)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;

m) $x_1 = 2$, $x_2 = -15$; *n)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; *o)* $x = -5$;

p) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

2162 *a)* $x \neq 5$ és $x \neq -5$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $2x^2 - 50 = 0$. Nincs megoldás.

b) $x \neq 4$ és $x \neq -4$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 6x + 8 = 0$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x = 2$.

c) $x \neq \frac{1}{3}$ és $x \neq -\frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $6x^2 + 4x + 1 = 0$. Nincs megoldás.

d) $x \neq \frac{1}{2}$ és $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 3x - 10 = 0$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.

e) $y \neq \pm 2$, $y \in \mathbb{R}^-$. Átalakítás után:

$$1 - \frac{6 - y}{3 \cdot (y + 2) \cdot (y - 2)} = \frac{-2}{y - 2}.$$

Rendezve: $3y^2 + 7y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = \frac{2}{3}$ és $y_2 = -3$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -3$.

f) $a \neq \pm 3$, $a \in \mathbb{R}^+$. Átalakítás után:

$$\frac{24 + 12a}{(a + 3) \cdot (a - 3)} - \frac{5a}{a + 3} - \frac{a + 7}{a - 3} = 0.$$

Rendezve: $6a^2 - 17a - 3 = 0$, amiből: $a_1 = 3$ és $a_2 = -\frac{1}{6}$.
Az egyenletnek az adott számhalmazon nincs megoldása.

g) $b \neq \pm 2$, $b \in \mathbb{Q}$. Átalakítás után:

$$\frac{16 + 2b}{3 \cdot (b + 2) \cdot (b - 2)} - \frac{b - 1}{2 \cdot (b + 2)} - \frac{2b + 1}{3 \cdot (b - 2)} = 0.$$

Rendezve: $7b^2 - 3b - 22 = 0$, amiből: $b_1 = 2$ és $b_2 = -\frac{11}{7}$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $b = -\frac{11}{7}$.

h) $d \neq 0,\ d \neq \pm 2,\ d \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{4}{d \cdot (d+2)} = \frac{d}{(d+2) \cdot (d-2)} - \frac{1}{d \cdot (d-2)}.$$

Rendezve: $d^2 - 5d + 6 = 0$, amiből: $d_1 = 3$ és $d_2 = 2$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $d = 3$.

i) $e \neq 5,\ e \neq -2,\ e \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{21}{(e-5)^2} - \frac{2e}{e-5} + \frac{3 \cdot (2+e)}{e+2} = 0.$$

Rendezve: $e^2 - 20e + 96 = 0$, amiből: $e_1 = 12$ és $e_2 = 8$.
Az egyenletnek mindkét gyöke megoldás az adott számhalmazon.

j) $y \neq -1,\ y \neq 3,\ y \in \mathbb{Z}^-$. Átalakítás után:

$$\frac{y}{y-3} - \frac{2}{y+1} - \frac{4y}{(y-3) \cdot (y+1)} = 0.$$

Rendezve: $y^2 - y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = 3$ és $y_2 = -2$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -2$.

2163 Az egyenlet diszkriminánsa: $16 - 20c$.

a) Két különböző valós megoldás van, ha $16 - 20c > 0$, vagyis $c < \frac{4}{5}$.

b) Egy valós megoldás van, ha $16 - 20c = 0$, vagyis $c = \frac{4}{5}$.

c) Nincs valós megoldás, ha $16 - 20c < 0$, vagyis $c > \frac{4}{5}$.

2164 *a)* $a \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 1 = 0$, ha $a = \frac{19}{9}$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $36 + 4a$.
Egy valós megoldás van:
I. Ha az egyenlet elsőfokú: $a = 0$, ekkor $x = \frac{1}{6}$.
II. Ha $a \neq 0$, $D = 36 + 4a = 0$, vagyis $a = -9$. Ebben az esetben $x = \frac{1}{3}$.

c) Két különböző valós megoldás van, ha $a \neq 0$ és $36 + 4a > 0$, vagyis ha $a > -9$, de $a \neq 0$.

d) Nincs valós megoldás, ha $36 + 4a < 0$, vagyis ha $a < -9$.

2165 Az egyenlet diszkriminánsa $(2m+1)^2 - 4m \cdot (m-3) = 16m + 1$.

a) Egy valós megoldás van:
I. Ha az egyenlet elsőfokú, azaz $m = 0$, ekkor $x = -3$.
II. Ha $m \neq 0$, a diszkrimináns $16m + 1 = 0$, amiből $m = -\frac{1}{16}$.
Az egyenlet: $-\frac{1}{16} \cdot x^2 - \frac{14}{16} \cdot x - \frac{49}{16} = 0$, a megoldása $x = -7$.

b) Két megoldás van, ha $16m + 1 > 0$, azaz $m > -\frac{1}{16}$, de $m \neq 0$.

c) Nincs megoldás, ha $16m + 1 < 0$, azaz $m < -\frac{1}{16}$.

2166 Vizsgáljuk meg az egyenlet diszkriminánsát:

$$D = 4 \cdot (5k+3)^2 - 20 \cdot (5k^2 + 6k + 1) = 16.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy könnyen megkaphatjuk az egyenlet gyökeit:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (5k+3) + 4}{10} = \frac{10k + 10}{10} = k + 1 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2 \cdot (5k+3) - 4}{10} = \frac{10k+2}{10} = k + \frac{1}{5}.$$

A gyökök különbsége: $x_1 - x_2 = \frac{4}{5}$, valóban független k-tól.

2167 Ha van valós gyök, akkor az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív:

$$D = 4 \cdot (a - b + c)^2 - 12 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0.$$

Átalakítva:

$$4 \cdot \left[(a - b + c)^2 - 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)\right] = -8 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc).$$

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$D = -4 \cdot \left[(a+b)^2 + (a-c)^2 + (b+c)^2\right],$$

ez a kifejezés soha nem pozitív, csak akkor van megoldás, ha 0-val egyenlő.

Ekkor $a + b = 0$, $a - c = 0$ és $b + c = 0$.

Mindhárom feltétel teljesül, ha $a = c = -b$.

Ekkor a c helyére a-t, és b helyére $(-a)$-t helyettesítve és 3-mal osztva azt az egyenletet kapjuk, hogy $a^2x^2 + 2ax + 1 = 0$, ahol $a \neq 0$.

Az egyenlet egyetlen megoldása $x = -\frac{1}{a}$.

A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés – megoldások

2168 *a)* $(x-2) \cdot (x+3)$; *b)* $(x+4) \cdot (x+3)$; *c)* $(x-5) \cdot (x+7)$;
d) $(x+10) \cdot (x+6)$; *e)* $(x-8)^2$; *f)* nincs megfelelő szorzat;
g) $(2x+3) \cdot (x-3)$; *h)* $2 \cdot (x+7)^2$; *i)* $(3x+2) \cdot (x+2)$;
j) $(2x-1) \cdot (3x+5)$; *k)* $(3-2x) \cdot (x+6)$; *l)* $(4-3x) \cdot (4x+1)$.

2169 *a)* $x^2 - 7x + 12 = 0$; *b)* $x^2 - 5x - 14 = 0$; *c)* $x^2 + 9x + 18 = 0$;
d) $x^2 + 4x - 5 = 0$; *e)* $x^2 - 36 = 0$; *f)* $x^2 - 33x + 252 = 0$;
g) $x^2 + 4x = 0$; *h)* $6x^2 - 7x + 2 = 0$; *i)* $15x^2 + x - 2 = 0$;
j) $20x^2 + 19x + 3 = 0$; *k)* $30x^2 + 19x - 28 = 0$; *l)* $72x^2 - 41x - 91 = 0$.

2170 Például:
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; *b)* $x^2 + 2x - 3 = 0$; *c)* $3x^2 + x - 2 = 0$;
d) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; *e)* $13x^2 - 35x + 22 = 0$; *f)* $x^2 - 3 = 0$;
g) $x^2 - 4x + 1 = 0$; *h)* $x^2 - 14x + 31 = 0$.

2171 *a)* $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(x+4) \cdot (x+3)}{(x+4) \cdot (x-2)} = \frac{x+3}{x-2}$; *b)* $\frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15} = \frac{(3x+2) \cdot (x-5)}{(2x+3) \cdot (x-5)} = \frac{3x+2}{2x+3}$;

c) $\frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 11x + 15} = \frac{(2x+5) \cdot (x-1)}{(2x+5) \cdot (x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$; *d)* $\frac{10x^2 - 13x - 3}{-8x^2 + 14x - 3} = \frac{(5x+1) \cdot (2x-3)}{(3-2x) \cdot (4x-1)} = \frac{5x+1}{1-4x}$.

2172 *a)* $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$;

b) $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 5$;

d) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{29}{4}$;

e) $x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = \frac{5}{2}$, $x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$, az egyenlet: $2x^2 - 5x - 1 = 0$.

f) Ha $x_3 = x_1 - 2$ és $x_4 = x_2 - 2$, akkor:

$$x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{13}{2} \quad \text{és} \quad x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot (x_1 + x_2) + 4 = \frac{17}{2}.$$

Az egyenlet: $2x^2 + 13x + 17 = 0$.

2173 *a)* Az $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ kifejezést átalakítva: $x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2)$, majd ebbe helyettesítve a Vieté-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -7;\ x_1 \cdot x_2 = 12)$ kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -84.$$

Vegyük észre, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$. Ebbe helyettesítsük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -7;\ x_1 \cdot x_2 = 12)$. Így kapjuk, hogy:

$$x_1^2 + x_2^2 = 25.$$

b) Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{4}.$$

c) Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{15}{4} \quad \text{és} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{29}{4}.$$

2174 Az $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ átalakítást elvégezve, az egyenletbe helyettesítjük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = -15)$, így kapjuk, hogy:

$$34 = (-p)^2 - 2 \cdot (-15), \quad \text{amiből} \quad p = \pm 2.$$

2175 Oldjuk meg a megfelelő egyenleteket paraméteresen, és alakítsuk szorzattá:

a) $\frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} = \frac{(x + y) \cdot (x - 3y)}{(x - y) \cdot (x - 3y)} = \frac{x + y}{x - y}$;

b) $\frac{2x^2 + 5xy - 3y^2}{2x^2 + 3xy - 2y^2} = \frac{(2x - y) \cdot (x + 3y)}{(2x - y) \cdot (x + 2y)} = \frac{x + 3y}{x + 2y}$;

c) $\frac{x^2 + (3 - 2y) \cdot x - 6y}{x^2 - (1 + 2y) \cdot x + 2y} = \frac{(x - 2y) \cdot (x + 3)}{(x - 2y) \cdot (x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1}$;

d) $\frac{6x^2 + (15 + 4y) \cdot x + 10y}{6x^2 + (4y - 9) \cdot x - 6y} = \frac{(3x + 2y) \cdot (2x + 5)}{(3x + 2y) \cdot (2x - 3)} = \frac{2x + 5}{2x - 3}$.

2176 A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = p^2 - 2q,$$

$$y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 \cdot x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) =$$
$$= (-p)^3 - 3q \cdot (-p) = -p^3 + 3p \cdot q.$$

A keresett egyenlet együtthatói szintén felírhatók a gyökökkel, ezért a megfelelő egyenlet:

$$y^2 - [(p^2 - 2q) + (3p \cdot q - p^3)] \cdot y + (p^2 - 2q) \cdot (3p \cdot q - p^3) = 0.$$

Felbontva a zárójeleket:

$$y^2 + (p^3 - p^2 - 3p \cdot q + 2q) \cdot y - p^5 + 5p^3 \cdot q - 6p \cdot q^2 = 0.$$

Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek – megoldások

2177 *a)* $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

b) $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

c) $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

d) $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = -1$: nincs megoldása.

e) $x^2 = 25$: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

f) $x^2 = -4$ vagy $x^2 = -7$: nincs megoldása.

g) $x^2 = \frac{1}{4}$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; vagy $x^2 = \frac{1}{16}$: $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = -\frac{1}{4}$.

h) $x^2 = \frac{1}{25}$: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; vagy $x^2 = -3$: nincs megoldása.

i) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 8$: $x_2 = 2$.

j) $x^3 = 27$: $x_1 = 3$; vagy $x^3 = 1$: $x_2 = 1$.

k) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = -8$: $x_2 = -2$.

l) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 5$: $x_2 = \sqrt[3]{5}$.

2178 *a)* $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{7}{4}$;

b) $x_1 = 8$, $y_1 = 4$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$;

c) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{8}{3}$, $y_2 = \frac{23}{9}$;

d) $x_1 = 1$, $y_1 = -1$; $x_2 = -\frac{13}{10}$, $y_2 = -\frac{73}{50}$;

e) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 5$;

f) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -\frac{3}{2}$, $y_2 = -4$;

g) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 6$, $y_2 = \frac{1}{3}$;

h) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $y_1 = 8$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$;

i) $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -3$, $y_2 = 1$;

j) $x_1 = \frac{8}{5}$, $y_1 = -\frac{31}{5}$; $x_2 = -4$, $y_2 = 5$.

2179 *a)* Ha $a = (x-2)^2$ az egyenlet: $a^2 - 5a + 4 = 0$. Megoldásai: $a = 1$ és $a = 4$.
Visszahelyettesítve: $(x-2)^2 = 1$, amiből $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;
$(x-2)^2 = 4$, amiből $x_3 = 0$, $x_4 = 4$.

b) A $b = (x+3)^2$ helyettesítéssel: $b^2 - 7b - 18 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 9$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $(x+3)^2 = 9$, ahonnan $x_1 = 0$, $x_2 = -6$;
$(x+3)^2 = -2$, aminek nincs megoldása.

c) A $c = (x+5)^2$ helyettesítéssel: $c^2 - 13c - 48 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 16$, $c_2 = -3$.
Visszahelyettesítve: $(x+5)^2 = 16$, amiből $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;
$(x+5)^2 = -3$, aminek nincs megoldása.

d) A $d = (x-3)^2$ helyettesítéssel: $36d^2 - 13d + 1 = 0$, aminek megoldásai: $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = \frac{1}{9}$.
Visszahelyettesítve: $(x-3)^2 = \frac{1}{4}$, amiből $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$;
$(x-3)^2 = \frac{1}{9}$, amiből $x_3 = \frac{10}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}$.

2180 *a)* Az $a = x^2 + 6x$ helyettesítéssel: $a \cdot (a+4) - 77 = 0$, aminek megoldásai: $a_1 = 7$, $a_2 = -11$.
Visszahelyettesítve: $x^2 + 6x = 7$, amiből $x_1 = 1$, $x_2 = -7$;
$x^2 + 6x = -11$, aminek nincs megoldása.

b) A $b = x^2 - 4x$ helyettesítéssel: $b \cdot (b-3) - 10 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 5$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 4x = 5$, amiből $x_1 = 5$, $x_2 = -1$;
$x^2 - 4x = -2$, amiből $x_3 = 2 + \sqrt{2}$, $x_4 = 2 - \sqrt{2}$.

c) Az egyenlet átalakítható: $(x^2 - 2x)^2 - 11 \cdot (x^2 - 2x) + 24 = 0$.
A $c = x^2 - 2x$ helyettesítéssel: $c^2 - 11c + 24 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 8$, $c_2 = 3$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 2x = 8$, amiből $x_1 = 4$, $x_2 = -2$;
$x^2 - 2x = 3$, amiből $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

2181 *a)* Az első egyenletbe helyettesítve a másodikat: $-8 - 2x + y = 2$, ebből y-t kifejezve és behelyettesítve a második egyenletbe: $x^2 + 5x + 4 = 0$, ebből $x_1 = -1$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$.

b) Az első egyenlethez hozzáadva a második 4-szeresét: $13x^2 = 117$, ebből: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$; $x_3 = -3$, $y_3 = 1$; $x_4 = -3$, $y_4 = -1$.

c) Az elsőből helyettesítve a másodikba, beszorzás után: $x^2 - 17x + 30 = 0$, ebből $x_1 = 15$, $y_1 = -10$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

d) A másodikból helyettesítve az elsőbe, beszorzás után: $2y^2 + 3y - 2 = 0$, ebből: $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 6$, $y_2 = -2$.

e) Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 4$, $y_1 = -2$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; $x_3 = 2$, $y_3 = -4$; $x_4 = -2$, $y_4 = 4$.

f) Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 3x^2 - 54 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -3$, $y_2 = -2$.

g) Összeadva az egyenleteket: $2x^2 + 2x = 60$, megoldva és visszahelyettesítve: $x_1 = 5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 5$, $y_2 = -2$; $x_3 = -6$, $y_3 = 1$; $x_4 = -6$, $y_4 = -2$.

h) A két egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva és elosztva az elsőt a másodikkal: $\frac{x}{y} = -4$, ezt visszahelyettesítve: $x_1 = -4$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = -1$.

2182 *a)* Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt x^2-tel:

$$2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $2 \cdot (y^2 - 2) - 9y + 14 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = 2$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

$x + \frac{1}{x} = 2$. A megoldása: $x_3 = 1$.

b) Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt x^2-tel:

$$6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $6 \cdot (y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{2}$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. A megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$;

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

2183 *a)* Ha megvizsgáljuk az egyenletet, kiderül, hogy az $x_1 = 1$ megoldás, ennek megfelelően alakítsuk:

$$x^2 \cdot (x - 1) - x \cdot (x - 1) - 12 \cdot (x - 1) = 0,$$
$$(x - 1) \cdot (x^2 - x - 12) = 0.$$

A szorzat másik tényezője is lehet 0: $x^2 - x - 12 = 0$. A megoldásai: $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

b) Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = -1$. Alakítsuk szorzattá:

$$x^2 \cdot (x + 1) - x \cdot (x + 1) - 6 \cdot (x + 1) = 0,$$
$$(x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0.$$

Ha a másik tényező 0: $x^2 - x - 6 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

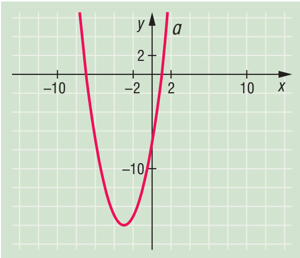
c) Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = 2$. Alakítsuk szorzattá:

$$x^2 \cdot (x - 2) + 9x \cdot (x - 2) + 20 \cdot (x - 2) = 0,$$
$$(x - 2) \cdot (x^2 + 9x + 20) = 0.$$

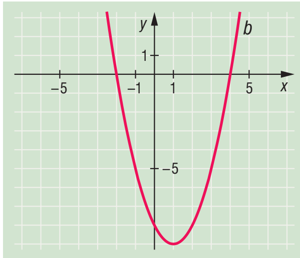
A második tényezőből: $x^2 + 9x + 20 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = -4$, $x_3 = -5$.

Másodfokú egyenlőtlenségek – megoldások

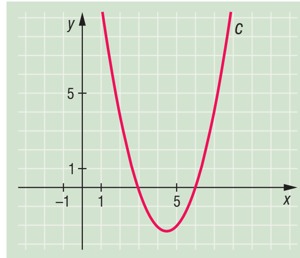
2184 *a)* $x < -7$ vagy $x > 7$; *b)* $-10 \le x \le 10$; *c)* $x \le -6$ vagy $x \ge 6$;
d) $-20 < x < 20$; *e)* $x \in \mathbb{R}$; *f)* nincs megoldás;
g) $-\sqrt{15} \le x \le \sqrt{15}$; *h)* $x \le -\sqrt{7}$ vagy $x \ge \sqrt{7}$; *i)* $x \le -3$ vagy $0 \le x$;
j) $-\frac{5}{2} < x < 0$; *k)* $x < 0$ vagy $x > \frac{8}{3}$; *l)* $0 \le x \le 5$.

2185 *a)*


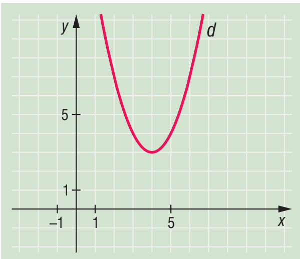
$-7 < x < 1$;

b)


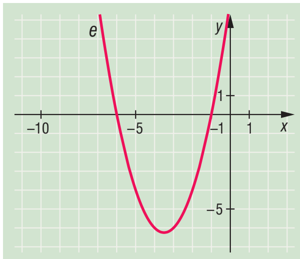
$x \leq -2$ vagy $4 \leq x$;

c)


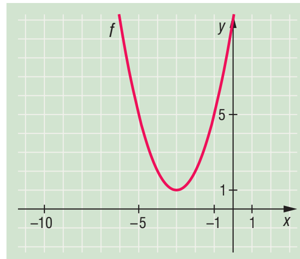
$3 < x < 6$;

d)


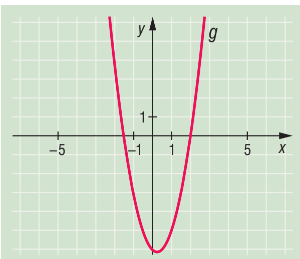
nincs megoldás;

e)


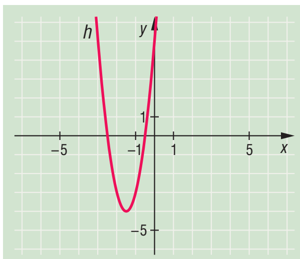
$x < -6$ vagy $-1 < x$;

f)


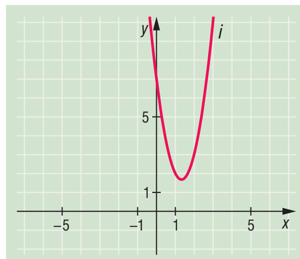
$x \in \mathbb{R}$;

g)


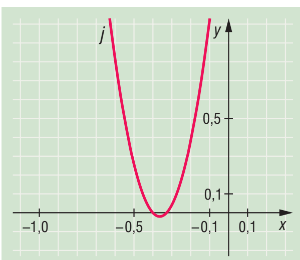
$-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$;

h)


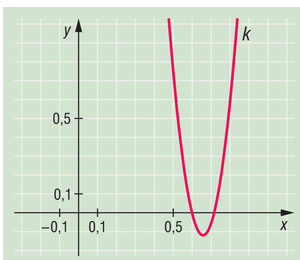
$-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$;

i)


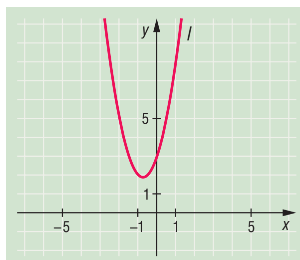
$x \in \mathbb{R}$;

j)


$x < -\frac{2}{5}$ vagy $-\frac{1}{3} < x$;

k)


$\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{5}{7}$;

l)


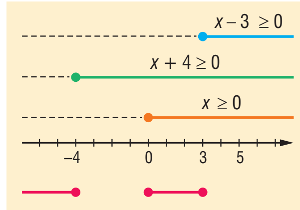
nincs megoldás.

2186 *a)* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
b) $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;
c) $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
d) minden egész szám megoldás;
e) $\{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
f) $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
g) $\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$;
h) $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$;
i) $\{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

2187 *a)* Az x kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$x^3 + x^2 - 12x = x \cdot (x+4) \cdot (x-3) \le 0.$$

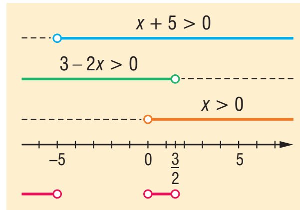
A megoldás: $x \le -4$ vagy $0 \le x \le 3$.



b) Az x kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$-2x^3 - 7x^2 + 15x = x \cdot (3-2x) \cdot (x+5) > 0.$$

A megoldás: $x < -5$ vagy $0 < x < \frac{3}{2}$.

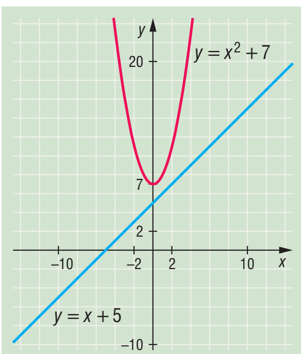


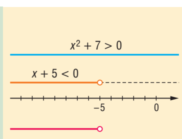
c) $x^2 \le -8$ vagy $x^2 \ge 4$, az elsőnek nincs megoldása, a másodikból: $x \le -2$ vagy $2 \le x$.

d) $1 < x^2 < 9$, amiből $-3 < x < -1$ vagy $1 < x < 3$.

2188 *a)* A nevező: $x^2 + 7 > 0$.

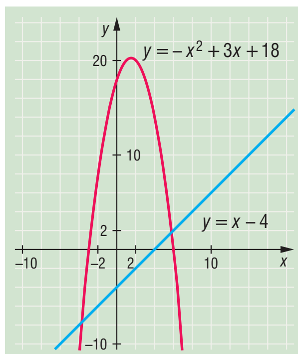
A megoldás: $x < -5$.

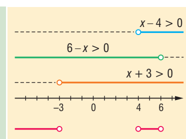




b) $\frac{-x^2 + 3x + 18}{x-4} = \frac{(x+3)\cdot(6-x)}{x-4} > 0.$

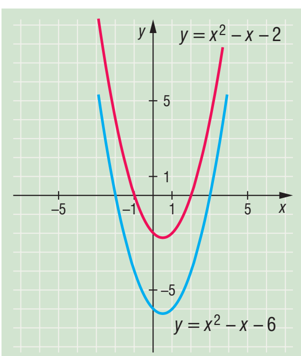
A megoldás: $x < -3$ vagy $4 < x < 6$.

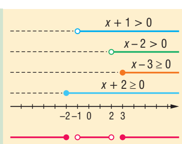




c) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+1)} \ge 0,$

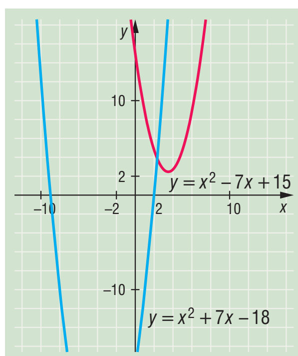
ezért: $x \le -2$ vagy $-1 < x < 2$ vagy $3 \le x$.

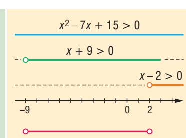




d) $\frac{x^2 - 7x + 15}{x^2 + 7x - 18} = \frac{x^2 - 7x + 15}{(x-2)\cdot(x+9)} \le 0.$

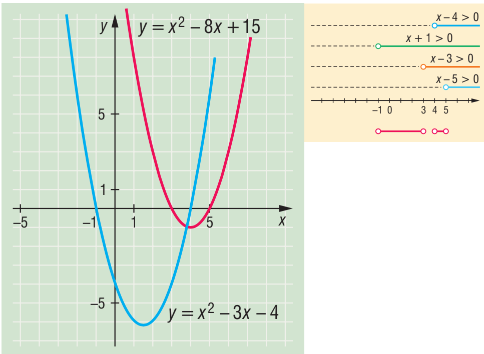
A megoldás: $-9 < x < 2$.





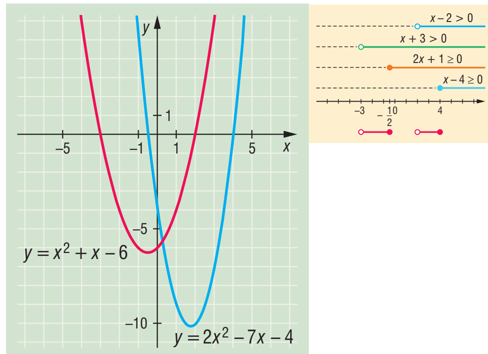
e) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-4}=\dfrac{(x-5)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-4)}<0.$

A megoldás: $-1<x<3$ vagy $4<x<5$.



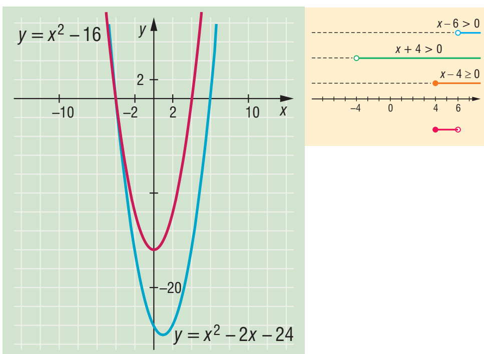
f) $\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-4)\cdot(2x+1)}{(x+3)\cdot(x-2)}\leq 0.$

A megoldás: $-3<x\leq-\dfrac{1}{2}$ vagy $2<x\leq 4$.



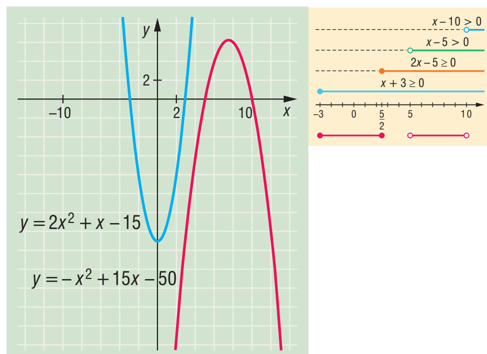
g) $\dfrac{x^2-16}{x^2-2x-24}=\dfrac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x+4)\cdot(x-6)}\leq 0.$

A megoldás: $4\leq x<6$.



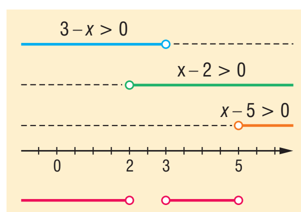
h) $\dfrac{2x^2+x-15}{-x^2+15x-50}=\dfrac{(x+3)\cdot(2x-5)}{-(x-5)\cdot(x-10)}\geq 0.$

A megoldás: $-3\leq x\leq\dfrac{5}{2}$ vagy $5<x<10$.



2189 *a)* $\dfrac{(x-5)\cdot(x-2)}{3-x}>0,\ \ x\neq 3.$

Meghatározzuk, hogy a feladatban szereplő $(x-5)$, $(x-2)$ és $(3-x)$ kifejezések mely értékekre pozitívak, illetve negatívak. Az ábra szerint a megoldás: $x<2$ vagy $3<x<5$.

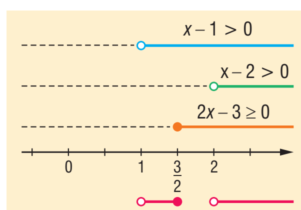


b) $\dfrac{x-1}{x-2}\geq\dfrac{x-2}{x-1},\ \ x\neq 2, x\neq 1.$

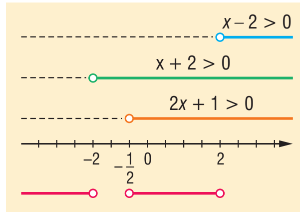
Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, majd a közös nevezőre hozatal és összevonás után kapjuk:

$$\frac{2x-3}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0.$$

A kifejezések előjelvizsgálata után a megoldás: $1<x\leq\dfrac{3}{2}$.



c) $1+\dfrac{5}{x-2}<\dfrac{x-1}{2+x}$, $x \neq \pm 2$.

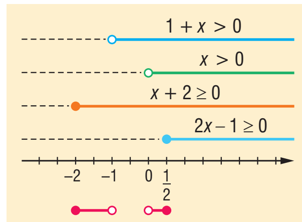


Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, hasonlóan a *b)* feladat megoldásához. A közös nevezőre hozatal, és az összevonás után a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{8x+4}{(x+2)\cdot(x-2)}<0,\ \text{melyből:}\ \frac{4\cdot(2x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)}<0.$$

A hányadosban szereplő kifejezések előjelvizsgálata után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x<-2$ vagy $-\dfrac{1}{2}<x\le 2$.

d) $1+\dfrac{3}{2+2x}\le\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0, x\neq 1$.



Átalakítás után az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

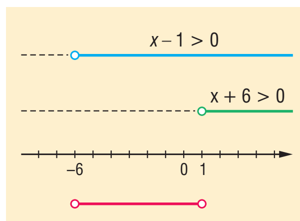
$$1+\frac{3}{2\cdot(1+x)}-\frac{1}{x}\le 0,\ \text{melyből:}\ \frac{(2x-1)\cdot(x+2)}{2x\cdot(1+x)}\le 0.$$

A kifejezések előjelvizsgálat után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $-2\le x<-1$ vagy $0<x\le\dfrac{1}{2}$.

e) $\dfrac{-5}{4x^2-4x+1}>0$, $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Mivel a számláló konstans és negatív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevezője negatív. A nevezőt teljes négyzetté alakítva kapjuk: $(2x-1)^2$, amely kifejezés soha nem lesz negatív. Az egyenlőtlenségnek nincs tehát megoldása.

f) $\dfrac{6}{6-5x-x^2}\ge 0$, $x\neq -2, x\neq 1$.



Mivel a számláló konstans és pozitív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevező pozitív. (Az egyenlőség soha nem teljesülhet.) A $6-5x-x^2$ kifejezést szorzattá alakítva: $-(x+6)\cdot(x-1)>0$, vagyis $(x+6)\cdot(x-1)<0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Előjelvizsgálatot tartunk. E szorzat akkor negatív, ha a két tényezője ellenkező előjelű (és ez egyszerre teljesül).

Az egyenlőtlenség megoldása: $-6<x<1$.

2190 Az $x^2-3x-10=0$, ha $x_1=5, x_2=-2$.

Az egyenlőtlenség különböző alakú lesz:

I. Ha $x\le -2$ vagy $5\le x$, akkor $x^2-3x-10\le x+7$.
Azaz $x^2-4x-17\le 0$, ennek megoldása: $2-\sqrt{21}\le x\le 2+\sqrt{21}$.
A feltétellel összevetve: $2-\sqrt{21}\le x\le -2$ vagy $5\le x\le 2+\sqrt{21}$.

II. Ha $-2<x<5$, akkor $-x^2+3x+10\le x+7$.
Azaz $0\le x^2-2x-3$, ennek megoldása: $x\le -1$ vagy $3\le x$.
A feltétellel összevetve: $-2<x\le -1$ vagy $3\le x<5$.

A végeredmény: $2-\sqrt{21}\le x\le -1$ vagy $3\le x\le 2+\sqrt{21}$.

2191 *a)* A törtnek és a gyököknek akkor van értelme, ha:

$$x^2 - 3x - 28 \geq 0 \quad \text{és} \quad x^2 + 3x - 18 > 0.$$

Az első megoldása:

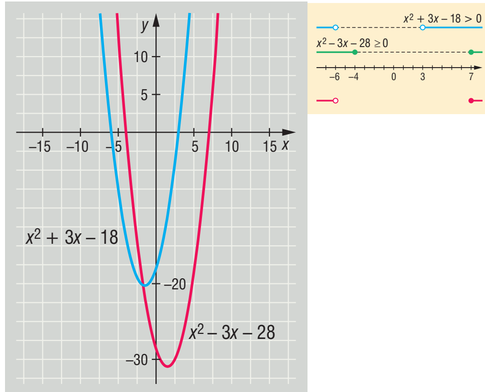
$$x \leq -4 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$

A második megoldása:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 3 < x.$$

A közös megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$



b) A gyöknek akkor van értelme, ha:

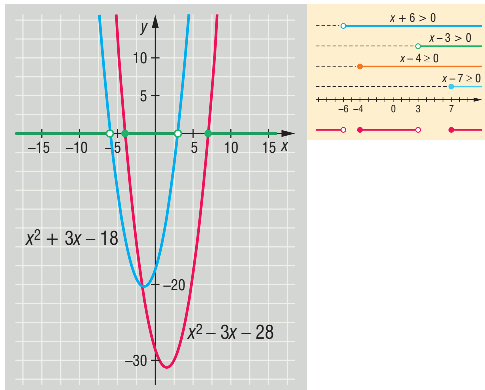
$$\frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 3x - 18} \geq 0.$$

A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítva:

$$\frac{(x-7)\cdot(x+4)}{(x-3)\cdot(x+6)} \geq 0.$$

A megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad -4 \leq x < 3 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$



2192 Mivel az egész számok körében keressük a megoldást, ha $x = 0$, akkor a harmadik egyenlőtlenség miatt $z = 0$, és a második miatt $y = 0$.

Általában is igaz, hogy ha valamelyik ismeretlen 0, akkor a másik kettő is az.

Ha egyik ismeretlen sem 0, adjuk össze a három egyenlőtlenséget:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3 + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3,$$
$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 3.$$

A teljes négyzetek nemnegatívak és az ismeretlenek 0-tól különböző egészek.

Csak akkor kaphatunk megoldást, ha:

$$(x+y)^2 \leq 1, \quad (y+z)^2 \leq 1, \quad (x+z) \leq 1.$$

A teljes négyzeteken belül a tagok nem lehetnek azonos előjelűek, mert akkor pl. $|x+y| \geq 2$ miatt $(x+y)^2 \geq 4$.

Tehát csak az fordulhat elő, hogy x és y ellentétes előjelű. Minden párra teljesülnie kellene az előbbinek, ami lehetetlen.

Tehát az egyenlőtlenség-rendszer egyetlen megoldása az egész számok körében a következő számhármas:

$$x = y = z = 0.$$

Paraméteres másodfokú egyenletek – megoldások

2193 Az adott egyenlet gyökei akkor egyenlőek, ha a diszkriminánsa 0. Tehát átalakítva az egyenletet, kapjuk, hogy:

$$x^2 - 2\cdot(4p-1)\cdot x + 15p^2 - 2p - 7 = 0.$$

Vagyis:

$$[-2\cdot(4p-1)]^2 - 4\cdot(15p^2 - 2p - 7) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $p_1 = 4$ és $p_2 = 2$.

Valóban, a $p = 4$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2 - 30x + 225 = 0$, ami $(x-15)^2 = 0$, így tehát a parabola érinti az x tengelyt.

A $p = 2$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2 - 14x + 49 = 0$, vagyis $(x-7)^2 = 0$. Ez a parabola szintén érinti az x tengelyt.

2194 *a)* Az egyenlet diszkriminánsa: $81b^2$. Megoldásai: $x_1 = 2b$, $x_2 = -7b$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $9 + 24b + 16b^2 = (3+4b)^2$. Megoldásai: $x_1 = 4b$, $x_2 = -3$.

c) Az egyenlet diszkriminánsa: $289b^2 = (17b)^2$. Megoldásai: $x_1 = \frac{b}{3}$, $x_2 = -\frac{5b}{2}$.

d) Ha $b = 0$, akkor az egyenlet elsőfokú, a megoldása: $x = 0$.

Ha $b \neq 0$, akkor az egyenlet diszkriminánsa: $16b^4 + 16b^2 + 4 = (4b^2 + 2)^2$, így a megoldások: $x_1 = \frac{2}{b}$, $x_2 = -4b$.

2195 *a)* Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet diszkriminánsa mikor nemnegatív:

$$(2b)^2 - 8\cdot(b+4) \geq 0,$$
$$b^2 - 2b - 8 \geq 0.$$

Ennek a megoldásai: $-2 \geq b$ vagy $4 \leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $-2 < b < 4$;

1 megoldása van, ha $b = -2$, ekkor $x = 1$,

vagy ha $b = 4$, ekkor $x = -2$;

2 megoldása van, ha $-2 > b$, vagy $4 < b$.

b) Ha $b = 0$, az egyenlet elsőfokú, egy megoldása van: $x = \frac{5}{4}$.

Ha $b \neq 0$, vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a diszkrimináns nemnegatív:

$$64 - 4b\cdot(10-b) \geq 0,$$
$$b^2 - 10b + 16 \geq 0.$$

Megoldásai: $b \leq 2$ vagy $8 \leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $2 < b < 8$;

1 megoldása van, ha $b = 0$, ekkor $x = \frac{5}{4}$,

ha $b = 2$, ekkor $x = 2$,

ha $b = 8$, ekkor $x = \frac{1}{2}$;

2 megoldása van, ha $b < 0$ vagy $0 < b < 2$ vagy $8 < b$.

2196 *a)* A törtek miatt $x \neq 3b$ és $x \neq -3b$. A közös nevező az $(x-3b)\cdot(x+3b) = x^2 - 9b^2$ szorzat, ezzel beszorozva:

$$(4x+b)\cdot(x+3b) + (3x+7b)\cdot(x-3b) = 8x^2 + 6b^2.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$x^2 - 11bx + 24b^2 = 0.$$

Megoldóképlettel megoldva: $x_1 = 8b$, $x_2 = 3b$, ez utóbbi nem megoldás, az előbbi pedig csak akkor, ha $b \neq 0$.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = 8b$.

b) Vizsgáljuk meg a nevezőket: $x^2 + bx + b^2 \neq 0$, mivel az $x^2 + bx + b^2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $-3b^2$, csak akkor van megoldás, ha $b = 0$, ekkor $x = 0$.

Az $x^3 - b^3 \neq 0$ és $b - x \neq 0$ mindkettő teljesül, ha $x \neq b$.

Tehát minden tört értelmezhető, ha $x \neq b$.

Legyen a közös nevező az $(x^2 + bx + b^2)\cdot(x-b) = x^3 - b^3$, ezzel beszorozva mindkét oldalt:

$$x\cdot(x-b) - 3b^2 = -(x^2 + bx + b^2).$$

Megoldások: $x_1 = b$, $x_2 = -b$, az első a feltételek miatt nem megoldás.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = -b$.

2197 *a)* A kifejezés minden valós számra pozitív, ha az $x^2 - 2bx + 2b + 15 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(-2b)^2 - 4\cdot(2b+15) < 0,$$
$$b^2 - 2b - 15 < 0.$$

Megoldása: $-3 < b < 5$.

b) A kifejezés minden valós számra pozitív, ha $b > 0$ és a $bx^2 + bx - 4x + 4 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b-4)^2 - 4b\cdot(4-b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(b-4+4b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(5b-4) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{4}{5} < b < 4$, és ez mindkét kezdeti feltételnek megfelel.

2198 *a)* A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 + bx + 3x + b + 3 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b+3)^2 - 4b\cdot(b+3) < 0,$$
$$(b+3)\cdot(3-3b) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $b < -3$ vagy $1 < b$.

Mindkét feltétel teljesül, ha $b < -3$.

b) A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 - 12x + 15 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$144 - 4b\cdot(15-b) < 0,$$
$$b^2 - 15b + 36 < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $3 < b < 12$.

Mivel a két kezdeti feltétel metszete az üres halmaz, nincs olyan b paraméterérték, amelyre a kifejezés minden valós helyen negatív értéket venne fel.

2199 Vizsgáljuk meg először az egyenlet diszkriminánsát: $D = (b+1)^2 + 8\cdot(b^2+1) > 0$, ezért minden valós b esetén két megoldása van az egyenletnek.

Nézzük a gyökök szorzatát: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-2}{b^2+1}$, negatív, mert $b^2 + 1 > 0$.

A szorzat negatív előjele azt jelenti, hogy megoldásaink ellentétes előjelűek, tehát a $]0; 1[$ intervallumba legfeljebb az egyik gyök kerülhet, a pozitív előjelű.

Gondoljunk most az $f(x) = (b^2+1)\cdot x^2 + (b+1)\cdot x - 2$ másodfokú függvényre, melynek $b^2 + 1 > 0$ miatt minimuma van, és két zérushellyel rendelkezik.

A pozitív zérushely akkor kerül a $]0; 1[$ intervallumba, ha a függvény a 0 és az 1 helyeken ellentétes előjelű értéket vesz fel.

Mivel $f(0) = -2$, ezért $f(1) = b^2 + 1 + b + 1 - 2 > 0$ kell teljesüljön.

Ebből $b^2 + b > 0$, ha $b < -1$ vagy $0 < b$.

Tehát $b < -1$ vagy $0 < b$ esetén teljesül, hogy az egyenletnek pontosan az egyik gyöke esik a $]0; 1[$ intervallumba.

Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek – megoldások

2200 *a)* Értelmezési tartomány: $x \ge -4$, megoldás: $x = 5$.

b) Értelmezési tartomány: $x \ge 5$, megoldás: $x = 86$.

c) Értelmezési tartomány: $x \ge \dfrac{3}{2}$, megoldás: $x = 2$.

d) Értelmezési tartomány: $x \ge -\dfrac{3}{4}$, nincs megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \ge -\dfrac{11}{4}$, megoldás: $x = 9{,}5$.

f) Értelmezési tartomány: $x \ge \dfrac{13}{8}$, megoldás: $x = \dfrac{77}{8}$.

g) Értelmezési tartomány: $x \ge \dfrac{5}{4}$, megoldás: $x = 2$.

h) Értelmezési tartomány: $x \ge -\dfrac{1}{7}$, megoldás: $x = 0$.

i) Értelmezési tartomány: $x \ge 2$, azt kapjuk, hogy $x = 1$, de ez nem megoldás.

j) Értelmezési tartomány: $x \ge -\dfrac{7}{6}$, megoldás: $x = -1$.

k) Értelmezési tartomány: $x \ge \dfrac{1}{8}$, megoldás: $x = \dfrac{8}{11}$.

l) Az értelmezési tartomány az üres halmaz, nincs megoldás.

2201 *a)* Értelmezési tartomány: $x \ge 0$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.
Csak $x = 3$ megoldás.

b) Értelmezési tartomány: $x \ge 4$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$.
Csak $x = 7$ megoldás.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.
Csak $x = 5$ megoldás.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq -4$. Megoldások: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, mindkettő megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \leq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
Csak $x = -3$ megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $x \geq 2$. Megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{4}$, de csak az $x = 4$ megoldás.

g) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{4}{5}$. Megoldások: $x_1 = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, mindkettő megoldás.

h) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{5}{3}$. Megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

i) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$.
Csak $x = 4$ megoldás.

j) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{10}{3}$.
Csak $x = 0$ megoldás.

k) Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{1}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -2$.
Csak $x = -2$ megoldás.

l) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{8}{3}$. Megoldások: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{11}{8}$, de csak az $x = 5$ megoldás.

2202 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$. négyzetre emelés után: $x \geq 1$. A megoldás: $x \geq 1$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után: $x < \frac{19}{2}$. A megoldás: $\frac{3}{2} \leq x < \frac{19}{2}$.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{4}$. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív, a jobb oldala pedig negatív, ezért a megoldás: $x \geq \frac{3}{4}$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{2}{5}$. Négyzetre emelés után: $x > \frac{3}{5}$. A megoldás: $x > \frac{3}{5}$.

e) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{4}{3}$. A bal oldala nemnegatív, a jobb oldala negatív szám, ezért nincs megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{7}$. Négyzetre emelés után: $x \leq \frac{8}{7}$. A megoldás: $-\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{8}{7}$.

g) Értelmezési tartomány: $x \leq 4$. Négyzetre emelés után: $x \leq -\frac{1}{2}$. A megoldás: $x \leq -\frac{1}{2}$.

h) Értelmezési tartomány: $x \leq 3$. Négyzetre emelés után: $x > -22$. A megoldás: $-22 < x \leq 3$.

2203 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq 3$. Két négyzetre emelés után a megoldás: $x = 7$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{6}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{4}$. Csak az első megoldás.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 47$, $x_2 = -1$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

d) Értelmezési tartomány: $x \ge 0$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 112{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \ge -2$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$. Csak az első megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $-\frac{4}{5} \le x \le \frac{1}{2}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{11}$, mindkettő megoldás.

g) Értelmezési tartomány: $x \ge 6$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.

h) Értelmezési tartomány: $-4 \le x \le \frac{1}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = \frac{5}{29}$, $x_2 = -3$. Csak a második megoldás.

2204 *a)* Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet alak áll, így az egyenlet: $2x^2 - |x-1| = 0$.

Az abszolút érték definíciója miatt: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \ge 1, \\ -x+1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$

Így $x \ge 1$ esetén az egyenlet: $2x^2 - x + 1 = 0$, amelynek a diszkriminánsa negatív, ekkor nincs megoldás.

Az $x < 1$ esetén az egyenletünk: $2x^2 + x - 1 = 0$, melynek az $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -1$ gyökei, az adott egyenlet megoldásai.

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan az egyenlet felírható $|x+1| = 2 \cdot |x| - 2$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < -1$, akkor az egyenlet: $-x - 1 = 2 \cdot (-x) - 2$, amiből $x = -1$. Ez nem megoldás az értelmezési tartományon.

Ha $-1 \le x < 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = -1$. Ez megoldása az adott eredeti egyenletnek.

Ha $x \ge 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = 3$. Ez megoldása az adott egyenletnek.

Összefoglalva: az egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$.

c) Az egyenlet felírható $|3-x| = 10 - |2-x|$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < 2$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (2 - x)$, amiből $x = -\frac{5}{2}$.

Ha $2 \le x < 3$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (-2 + x)$, amiből $3 \ne 12$.

Ha $x \ge 3$, akkor az egyenlet: $-3 + x = 10 - (-2 + x)$, amiből $x = \frac{15}{2}$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -\frac{5}{2}$ és $x_2 = \frac{15}{2}$.

2205 *a)* Értelmezési tartomány: $x^2 - 9 \ge 0$, ha $x \ge 3$ vagy $x \le -3$. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{x^2-9} = p$ helyettesítéssel a $p^2 - p - 6 = 0$ egyenlethez jutunk, amelyből $p_1 = 3$ és $p_2 = -2$.

Ha $p = 3$, akkor $\sqrt{x^2-9} = 3$, ekkor $x^2 = 18$, amiből $x = \pm 3 \cdot \sqrt{2}$.

Ha $p = -2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, hiszen az $\sqrt{x^2-9} = -2$ egyenletben a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal negatív.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\sqrt{18-9} - (18-9) = \sqrt{9} - 9 = 3 - 9 = -6,$$

mellyel a jobb oldal eredményéhez jutottunk.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. Vegyük észre, hogy mindkét oldal négyzetre emelése után a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{16}{x+2} - 8 + (x+2) = x, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ez megoldása az eredeti egyenletnek.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{8}{3}}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Ezután az $\frac{1}{2}$-et vigyük be a gyökjel alá: $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. A jobb oldalon álló kifejezéshez jutottunk.

2206 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$, ekkor a jobb oldal is pozitív. Négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - x$, amiből a megoldás: $0 < x < 1$.

b) Értelmezési tartomány: $x \leq 5$, mindkét oldal nemnegatív, ha $3 \leq x \leq 5$. Négyzetre emelve és rendezve $0 \leq x^2 - 5x + 4$, ennek megoldása $x \leq 1$ vagy $x \leq 4$. A végeredmény: $4 \leq x \leq 5$.

c) Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{13}{2}$.

Ha $x + 1 < 0$, azaz $x < -1$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -1$, négyzetre emelés után rendezve $0 \leq x^2 + 4x - 12$, amiből $x \leq -6$ vagy $2 \leq x$.

A végeredmény: $2 \leq x \leq \frac{13}{2}$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq -7{,}5$.

Ha $x > 0$, a jobb oldal negatív, teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $x \leq 0$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - 2x - 15$, amiből $-3 < x < 5$. Ebben az esetben a megoldás: $-3 < x \leq 0$.

A végeredmény: $-3 < x$.

e) A négyzetgyök alatti kifejezésnek nincs zérushelye, tehát minden valós számra értelmezhető.

Ha $2x - 1 < 0$, vagyis $x < \frac{1}{2}$, a jobb oldal negatív, az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $x \geq \frac{1}{2}$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \geq x^2 - 2x - 3$, amiből $-1 \leq x \leq 3$, ebben az esetben a megoldás: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

A végeredmény: $x \leq 3$.

f) Értelmezési tartomány: $x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

Ha $16 + 2x < 0$, azaz $x < -8$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -8$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \leq 3x^2 + 62x + 264$, amiből $x \leq -\frac{44}{3}$ vagy $-6 \leq x$. Csak a második ad megoldást.

A végeredmény: $-6 \leq x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

2207 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után:

$$x - \sqrt{6x-9} + 2 \cdot \sqrt{x^2 - (6x-9)} + x + \sqrt{6x-9} = 36,$$
$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 18 - x.$$

Mivel a gyök alatt teljes négyzet áll:

$$|x-3| = 18 - x.$$

Ha $x \geq 3$, az egyenlet: $x - 3 = 18 - x$, megoldása: $x = 10{,}5$.

Ha $x < 3$, az egyenlet: $-x + 3 = 18 - x$, nincs megoldás.

b) Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

Vezessünk be új változót: $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$, ahol $y \geq 0$.

Az egyenlet: $y^2 - 6 + y = 0$, ennek megoldásai: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, a második nem megoldás.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$2x^2 - 3x + 5 = 4,$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq 9$.

Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket (érdemes a másodikkal kezdeni):

$$\sqrt{x - 8 - 2 \cdot \sqrt{x-9}} = \sqrt{x - 9 - 2 \cdot \sqrt{x-9} + 1} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{x-9}\right)^2} = |1 - \sqrt{x-9}|,$$

$$\sqrt{x - 6 \cdot \sqrt{x-9}} = \sqrt{x - 9 - 6 \cdot \sqrt{x-9} + 9} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{x-9}\right)^2} = |3 - \sqrt{x-9}|.$$

Az egyenlet:

$$|3 - \sqrt{x-9}| + |1 - \sqrt{x-9}| = 2.$$

Három esetre bontva:

I. Ha $\sqrt{x-9} < 1$, akkor $3 - \sqrt{x-9} + 1 - \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 1$, nincs benne a kiindulási halmazban.

II. Ha $1 \leq \sqrt{x-9} < 3$, akkor $3 - \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, minden számra igaz, ami benne van a kiindulási halmazban.

III. Ha $3 \leq \sqrt{x-9}$, akkor $-3 + \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 3$.

Tehát a megoldás: $1 \leq \sqrt{x-9} \leq 3$, amiből négyzetre emelés után $10 \leq x \leq 18$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq 3$, és láthatóan az $x = 3$ nem megoldás.

Alakítsuk a hatodik gyök alatti kifejezést:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = x^2 \cdot (x-3) - 9 \cdot (x-3) =$$
$$= (x-3) \cdot (x^2 - 9) = (x-3)^2 \cdot (x+3).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a nem nulla, $\sqrt[6]{(x-3)^2 \cdot (x+3)}$ kifejezéssel.

Az egyenlet az osztás után:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} + 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} = 7.$$

Vezessünk be új változót: $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+3}}$.

Az új egyenlet: $\dfrac{1}{y^2}+6y=7$, beszorzás után: $6y^3-7y^2+1=0$.

Alakítsuk a bal oldalt:

$$\begin{aligned} 6y^3-6y^2-y^2+1&=0,\\ 6y^2\cdot(y-1)-(y^2-1)&=0,\\ 6y^2\cdot(y-1)-(y-1)\cdot(y+1)&=0,\\ (y-1)\cdot(6y^2-y-1)&=0. \end{aligned}$$

Ha $y=1$, akkor nincs megoldás.

Ha $6y^2-y-1=0$, akkor $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_2=-\dfrac{1}{3}$, csak az első megoldás.

Visszahelyettesítve: $\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+3}}=\dfrac{1}{2}$, amiből $x=\dfrac{65}{21}$, ami eleme az értelmezési tartománynak.

2208 Értelmezési tartomány: $x\ge 2$.

Az abszolút érték miatt az első tényező nemnegatív, csak akkor van megoldás, ha a második tényező pozitív: $-x^2+4x-3>0$, aminek a megoldása: $1<x<3$.

Összevetve az értelmezéssel: $2\le x<3$.

Ilyen x-ek esetén az első tényező: $0<1-\sqrt{x-2}\le 1$.

A második tényező: $0<-x^2+4x-3=1-(x-2)^2\le 1$.

Mivel mindkét tényező legfeljebb 1, a szorzatuk csak úgy lehet 1, ha mindkét tényező 1-gyel egyenlő. Ez pedig csak akkor igaz, ha $x=2$.

2209 Értelmezési tartomány: $x\ge -2$.

Mivel az egyenlet bal oldala nemnegatív, ezért $p\ge 2x$, ami azt jelenti, hogy $-2\le x\le \dfrac{p}{2}$, ami csak akkor ad megoldásokat, ha $p\ge -4$.

Négyzetre emelés után rendezzük az egyenletet:

$$0=4x^2-(4p+1)\cdot x+p^2-2.$$

Akkor van megoldás, ha a diszkrimináns nemnegatív:

$$D=(4p+1)^2-16\cdot(p^2-2)=8p+33\ge 0,$$

aminek a megoldása:

$$p\ge -\frac{33}{8}.$$

Összevetve a kezdeti feltétellel azt kapjuk, hogy $p\ge -4$ esetén lesz az egyenletnek megoldása.

Meg kell vizsgálnunk, hogy teljesül-e ilyen esetekben a megoldásokra az értelmezés $x\ge -2$ feltétele.

Ha $p\ge -4$, akkor $D\ge 1$, mivel a megoldások:

$$x_{1,2}=\frac{4p+1\pm\sqrt{D}}{8},$$

az egyik gyök:

$$x_1=\frac{4p+1+\sqrt{D}}{8}\ge\frac{4p+1+1}{8}=\frac{4p+2}{8}\ge\frac{-14}{8}>-2.$$

Tehát ha $p\ge -4$, akkor az egyenletnek biztosan van megoldása.

A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok – megoldások

2210 *a)* A számtani közép: 15, a mértani közép 9, különbségük 6.
b) A számtani közép: 19,5, a mértani közép 18, különbségük 1,5.
c) A számtani közép: 32,5, a mértani közép 30, különbségük 2,5.
d) A számtani közép: 65, a mértani közép 60, különbségük 5.
e) A számtani közép:12,5, a mértani közép $\approx 12{,}25$, különbségük $\approx 0{,}25$.
f) A számtani közép: 21, a mértani közép $\approx 20{,}98$, különbségük $\approx 0{,}02$.
g) A számtani közép: 179, a mértani közép $\approx 66{,}97$, különbségük $\approx 112{,}03$.
h) A számtani közép: 1033, a mértani közép $\approx 335{,}5$, különbségük $\approx 697{,}5$.

2211 *a)* 26; *b)* 26,45; *c)* 30; *d)* 35,71.

2212 A négyzet oldala 12 cm.

2213 *a)* $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{2{,}4} = 62{,}5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

b) $v_{\text{átl.}} = \dfrac{60 + 2 \cdot 80}{3} = 73{,}3\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

c) $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{\frac{50}{60} + \frac{50}{80} + \frac{50}{90}} = 74{,}5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

2214 Átlagosan 12,4%-kal csökkent az üzemanyag ára.

2215 **I. megoldás.** Ha a négyzetek oldalának hossza a és b, akkor a kerület: $4a + 4b = 200$, amiből $a + b = 50$.
A területek négyzetösszege:
$$a^2 + b^2 = a^2 + (50 - a)^2 = 2a^2 - 100a + 2500 = 2 \cdot (a - 25)^2 + 1250.$$
Minimális, ha $a = 25$ cm, ekkor $b = 25$ cm.
Így a területösszeg minimuma 1250 cm^2.
II. megoldás. Az $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ minimális, ha $2ab$ maximális.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:
$$2ab \le 2 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 1250,$$
akkor maximális a szorzat, ha $a = b = 25$.

2216 *a)* Ha a téglalap oldalainak hossza a és b, akkor $2a + 2b = 100$, vagyis $a + \mathrm{b} = 50$.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:
$$ab \le \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 625,$$
a szorzat maximális, ha $a = b = 25$, tehát a megoldás a négyzet.

b) Legyen a vízpartra merőleges oldal hossza x, akkor a másik oldal $100-2x$.
Keressük a $(100-2x)\cdot x$ szorzat maximumát.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$(100-2x)\cdot x=\frac{(100-2x)\cdot 2x}{2}\le\frac{\left(\frac{100-2x+2x}{2}\right)^2}{2}=1250,$$

a szorzat maximális, ha $100-2x=2x$, amiből $x=25$.
Tehát a téglalap oldalait 25 m és 50 m hosszúra kell választani.

2217 Legyen a és b a téglalap két oldalán elhelyezett járólapok száma.

a) Ebben az esetben $a\cdot b=100$. Keressük a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés minimumát.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$\frac{20a+20b}{2}\ge\sqrt{20a\cdot 20b}=200,$$

az összeg akkor minimális, ha $a=b=10$.
A minimális kerület 800 cm.

b) Most $a\cdot b=200$, és újra a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés minimumát keressük.
Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\frac{20a+20b}{2}\ge\sqrt{20a\cdot 20b}=200\cdot\sqrt{2},$$

az összeg minimális, ha $a=b=\sqrt{200}\approx 14{,}14$.
Mivel a járólapokat nem vághatjuk el, ez nem valósítható meg.
Keressük az $a\cdot b=200$ egyenlet egész megoldásait, és vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz minimális a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés.
A lehetséges szorzatok:

$$200=1\cdot 200=2\cdot 100=4\cdot 50=5\cdot 40=8\cdot 25=10\cdot 20.$$

Rendre kiszámítva a kerületeket:

8040; 4080; 2160; 1800; 1320; 1200.

Tehát akkor lesz a legkisebb a kirakott téglalap kerülete, ha a két különböző oldal mentén 10, illetve 20 darab járólapot helyezünk el.

2218 *a)* A hajók távolságát Pitagorasz-tétellel számolva:

$$d(12)=\sqrt{300^2+400^2}=500\text{ km},$$
$$d(13)=\sqrt{320^2+260^2}=412{,}3\text{ km}.$$

b) A távolság négyzete t idő múlva:

$$d(t)^2=(400-80t)^2+(300-40t)^2=$$
$$=8000t^2-88\,000t+250\,000=8000\cdot(t-5{,}5)^2+8000.$$

A hajók közötti távolság 5,5 óra múlva lesz a legkisebb.

c) A minimális távolság:

$$d_{\text{min.}}=\sqrt{8000}=89{,}44\text{ km}.$$

2219 Alakítsuk át a bizonyítandó állítás bal oldalát, ha $ab = 1$:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2a\cdot b}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2}{a-b}=(a-b)+\frac{2}{a-b}.$$

Mivel $a-b>0$, alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(a-b)+\frac{2}{a-b}\geq 2\cdot\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}}=2\cdot\sqrt{2}.$$

Akkor van egyenlőség, ha $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Ezzel az állítást beláttuk.

Másodfokú egyenletre vezető problémák – megoldások

2220 *a)* Az $x\cdot(x+12)=45$ egyenletből a két szám a 3 és 15 vagy a -15 és a -3.
b) Az $x^2+(x+12)^2=314$ egyenletből a két szám az 5 és 17 vagy a -17 és -5.
c) Az $\frac{x+12}{x}=x-10$ egyenletből a két szám a 12 és 24 vagy a -1 és 11.

2221 *a)* Az $x\cdot(20-x)=36$ egyenletből a két szám a 2 és 18.
b) Az $x^2+(20-x)^2=208$ egyenletből a két szám a 8 és 12.
c) Az $x^2-(20-x)^2=200$ egyenletből a két szám a 15 és 5.

2222 Az $x^2=3\cdot(x+3)+1$ egyenlet alapján a vásárolt sapkák száma 5.

2223 Az $(x+5)^2+x^2=493$ egyenletből a négyzetek oldala 13 cm és 18 cm.

2224 Az $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=190$ egyenletből a bajnokságban résztvevő csapatok száma 20.

2225 Az $x^2+(3x+3)^2=(3x+4)^2$ egyenlet megoldásából a téglalap oldalai 7 cm és 24 cm.

2226 Az $x\cdot(x+1)=10\cdot(2x+1)+56$ egyenlet megoldása alapján a két szám a 22 és 23 vagy a -3 és -2.

2227 Az egyenlet: $\frac{80}{x}=\frac{80}{x+4}+1$. Megoldása alapján $16\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtak, és 5 óra alatt értek célhoz.

2228 Az egyenlet: $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1$. Megoldás: az anya 3 óra, a lánya 6 óra alatt takarítana ki egyedül.

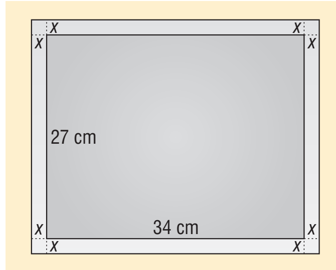
2229 Az egyenlet: $\frac{4000}{x}+9=\frac{4000}{x-90}$. Beszorzás és összevonás után: $x^2-90x-40\,000=0$. A muskátli palánta 250 Ft-ba kerül, 16 darabot lehet megvenni 4000 Ft-ból.

2230 *a)* Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50n$ egyenletből $n=103$.
b) Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50+n$ egyenlet pozitív megoldása $x\approx 12{,}8$. Tehát nincs ilyen sokszög.
c) Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=119$ egyenletből a sokszög 17 oldalú.

2231 A képernyő 28,5%-a: 261,63 cm^2.
A keret területéből felírható egyenlet:

$$4x^2 + 2 \cdot 34x + 2 \cdot 27x = 261{,}63.$$

A keret körülbelül 2 cm széles.



2232 Jelöljük x-szel azt, amennyi autót gyárt naponta a hagyományos részleg. Az egyenlet:

$$\frac{400}{x} + \frac{400}{x+5} = 36.$$

Beszorzás után:

$$9x^2 - 155x - 500 = 0.$$

A pozitív megoldása:

$$x = 20.$$

A két üzem, naponta 20, illetve 25 autót gyárt, az első 20 nap, a második 16 nap alatt.

2233 Tudjuk, hogy n különböző dologból 2-t $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki.
Az egyenlet:

$$\frac{2x \cdot (2x-1)}{2} = \frac{x \cdot (x-1)}{2} + 852.$$

Beszorzás után:

$$3x^2 - x - 1704 = 0.$$

A pozitív megoldás:

$$x = 24.$$

Tehát az osztályban 24-en vannak.

2234 Legyen a háromjegyű szám: $\overline{1xy}$. A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{100 + 10x + y}{x \cdot y} &= 6 + \frac{6}{x \cdot y} \\ 1 + x + y &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

A másodikból y-t helyettesítve az első egyenlet:

$$2x^2 - 19x + 35 = 0.$$

Aminek megoldásai:

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2{,}5.$$

Csak az első lehet számjegy, ebből $y = 4$.
A keresett szám a 174, ellenőrzéssel látható, hogy valóban megfelel.

2235 *a)* Legyen x a nők száma, y a férfiaké.

A puszik száma: $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$, a kézfogások száma: $\frac{y \cdot (y-1)}{2}$.

Mivel $x > y$, ezért az első tört nagyobb, tehát több puszi van, mint kézfogás.

b) A kézcsókok száma: $x \cdot y = 182$, és tudjuk, hogy $x + y = 27$.
A második egyenletből y-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$x^2 - 27x + 182 = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = 14, \quad x_2 = 13.$$

A férfiak számára $y_1 = 13$, $y_2 = 14$ adódik, a feladat feltételeinek az első számpár felel meg.
Tehát a társaságban 14 nő és 13 férfi van.
A kézfogások száma:

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

2236 *a)* Ha az ezüst fakanál árát első alkalommal $x\%$-kal emelték, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2x}{100}\right) = 1{,}32.$$

Beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 + 150x - 1600 = 0.$$

Az egyenletnek csak a pozitív megoldása felel meg:

$$x = 10.$$

Tehát az ezüst fakanál árát először 10%-kal, másodszor 20%-kal emelték.

b) Ha $x\%$-os volt a karácsony előtti emelés, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{x}{2}}{100}\right) = 1{,}08.$$

A beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0.$$

Aminek megoldásai:

$$x_1 = 80, \quad x_2 = 20.$$

Mindkét megoldás megfelel.
Tehát az arany fakanál árát decemberben vagy 80%-kal vagy 20%-kal emelték.

2237 *a)* Ki kell számítanunk $h(2)$ értékét:

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105.$$

Tehát a kilövés után 2 másodperccel 105 méter magasan lesz a rakéta.

b) Alakítsuk teljes négyzetté a függvény hozzárendelési szabályát:

$$h(t) = -5t^2 + 40t + 45 = -5 \cdot (t - 4)^2 + 125.$$

Amiből kiderül, hogy 4 másodperc múlva lesz a legmagasabban, a földtől 125 méterre.

c) Amikor földet ér, $h = 0$ lesz.
Meg kell oldani a következő egyenletet:

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0.$$

A megoldások:

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -1.$$

Csak a pozitív megoldás felel meg.
Tehát a rakéta 9 másodperccel a kilövés után ér földet.

Vegyes feladatok – megoldások

2238 *a)* $x = 7 \in \mathbb{Z}$; *b)* $x = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; *c)* $x = 3 \in \mathbb{N}$; *d)* $y = 5 \in \mathbb{Z}$.

2239 *a)* $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{3}{2}$; *b)* $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -3$;

c) $x_1 = 7,\ x_2 = -\frac{1}{3}$; *d)* $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$;

e) $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$; *f)* $x = -3$;

g) $x = 1$; *h)* $x_1 = 1,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4$;

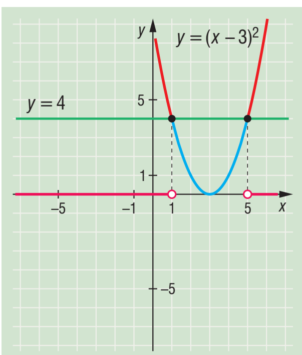
i) $x_1 = 2,\ x_2 = 1$.

2240 *a)* $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{5}$; *b)* $x < -\frac{3}{8}$ vagy $\frac{1}{2} < x$;

c) $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{3}$; *d)* $-4 \le x < -2$ vagy $-\frac{3}{2} < x \le -1$;

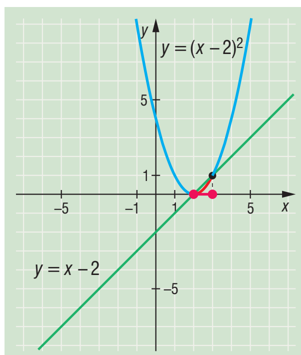
e) $-\frac{3}{4} \le x < \frac{1}{4}$; *f)* $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{2}$.

2241 *a)*



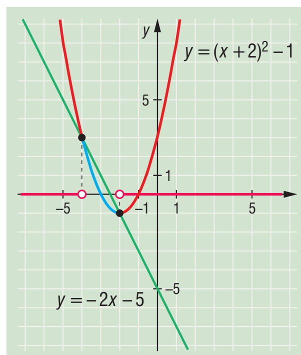
$x < 1$ vagy $x > 5$.

b)



$2 \le x \le 3$.

c)



$x < -4$ vagy $x > -2$.

Megjegyzés: A feladat nem kéri a megoldás típusát, így megoldható függvények felhasználásával vagy algebrai úton is. Ezért adtunk először mindhárom feladatra függvények felhasználásával kapott eredményt, majd csak az *a)* feladatra következzenek más megoldási lehetőségek is:

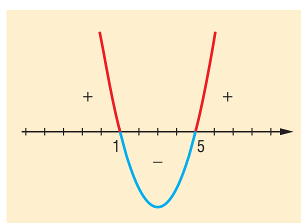
I. megoldás

Az $(x-3)^2 > 4$ rendezése után kapjuk, hogy:

$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Határozzuk meg a bal oldalon álló kifejezés zérushelyeit ($x_1 = 5$, $x_2 = 1$). Mivel x^2 együtthatója pozitív, a parabola felfelé nyíló, így egyszerű ábrát készítve kapjuk, hogy:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$



II. megoldás

Rendezés után kapjuk, hogy:

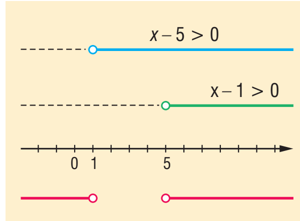
$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Megoldás lehet a bal oldali kifejezés szorzattá alakítása:

$$(x - 1) \cdot (x - 5) > 0.$$

Ábrát készítünk és megkapjuk, hogy a bal oldal akkor pozitív, ha:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$



2242 Ha a befogók x és y, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot y}{2} &= 30 \\ x^2 + y^2 &= 13^2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszerből a befogók hossza: 5 cm és 12 cm.

2243 Ha a sokszögek oldalszáma x és y, az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot (x-3)}{2} + \frac{y \cdot (y-3)}{2} &= 68 \\ (x-2) \cdot 180^\circ + (y-2) \cdot 180^\circ &= 2700^\circ \end{aligned}\right\}.$$

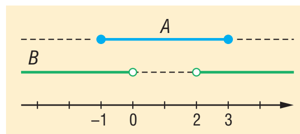
A második egyenletből érdemes helyettesíteni. A sokszögek 7, illetve 12 oldalúak.

2244 *a)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ vagy } 2 < x\}$.

b) $A \cup B = \mathbb{R}$.

c) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 0 \text{ vagy } 2 < x \le 3\}$.



2245 *a)* Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4},$$

amelyből leolvasható, hogy az f függvénynek maximuma van az $x = \frac{5}{2}$ helyen, értéke $y = \frac{49}{4}$.

A zérushelyek megállapíthatóak a másodfokú egyenlet megoldóképletével. E szerint $x_1 = -6$ és $x_2 = 1$ az egyenlet két zérushelye.

b) Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$g(x) = 10 \cdot (x - 1) + 10,$$

amiből leolvasható, hogy a függvénynek minimuma van az $x = 1$ helyen, értéke $y = 10$.

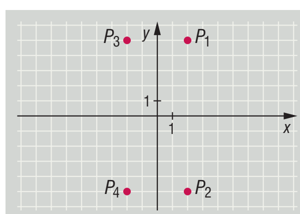
A zérushelyek meghatározásánál vegyük észre, hogy a diszkrimináns negatív, mert:

$$b^2 - 4ac = 400 - 4 \cdot 10 \cdot 20 = -400,$$

ezért a g függvénynek nincs zérushelye, nem érinti és nem metszi az x tengelyt.

2246 Az egyenletrendszer megoldásaiból a következő négy pont adódik:

$$P_1(2; 5), \quad P_2(2; -5), \quad P_3(-2; 5), \quad P_4(-2; -5).$$



2247 *a)* A gyökök négyzetösszege: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \dfrac{43}{9}$.

b) Az $5x^2 + 6x + 3 = 371$ egyenletből $x = 8$.

c) A hiányzó számjegy: $x = 5$.

2248 Ha $b = 2$, az egyenlet elsőfokú, megoldása: $x = -1$.

Ha $b \neq 2$, a másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (b+1)^2 - 4 \cdot (b-2) \cdot 3 = b^2 - 10b + 25 = (b-5)^2.$$

Ha $b = 5$, egy valós megoldás van: $x = -1$.

Ha $b \neq 5$, a diszkrimináns pozitív, tehát két valós megoldás van.